Risoluzione della prova

<u>ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

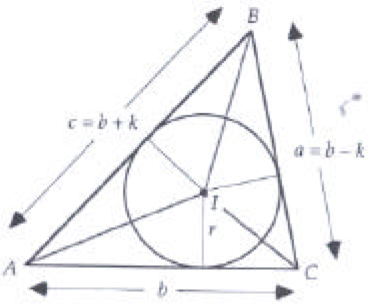
a.s. 2000/2001

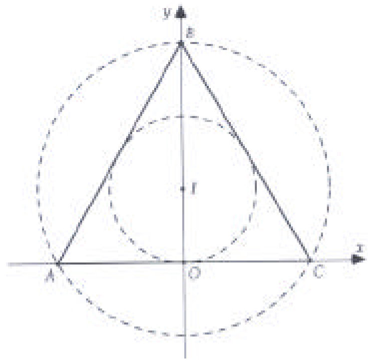
SESSIONE SUPPLETIVA PNI

PROBLEMA 1

Il fatto che a,b, c siano in progressione aritmetica significa che b si ottiene da a, supposto essere il lat una certa quantità k, e c da b aggiungendo la medesima quantità k. K è detta ragione della progression Cioè b=a+k ovvero a=b-k;

c=a+2k=b+k.





Domanda a): raggio del cerchio inscritto.

- Il raggio *r* del cerchio inscritto in un triangolo è espresso dalla formula *r =A/p*
  dove A = Area triangolo, p=semiperimetro
- La formula si ricava facilmente scomponendo il triangolo ABC nei tre triangoli ABI, ACI, BCI, essendo I *l'incentro* di ABC (vedi figura).

  Infatti esprimendo l'area di ABC come somma delle aree di tali triangoli, che hanno tutti altezza *r*, si ha:

  A = ½*(a-r + b-r + c-r] = ½*(a + b + c)r = p*r da cui segue subito r =A/p
- Nel nostro caso tenendo presente le relazioni intercorrenti tra i lati,

  $p = 1/2 * [(b-k) + b + (b+k)] = 3/2 * b$.

Del triangolo ABC si conoscono soltanto le misure dei lati; la sua area *A* può

essere calcolata tramite la formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3}{2}b^2(\frac{1}{2}b+k)(\frac{1}{2}b-k)} = \sqrt{\frac{3}{16}b^2(b^2-4k^2)} = \frac{\sqrt{3}}{4}b\sqrt{b^2-4}$$

$$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}b\sqrt{b^2-4k^2}}{\frac{3}{2}b} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{b^2-4k^2} = \mathrm{r(k)}$$

- Qualche osservazione riguardo al <u>dominio</u> della funzione *r(k)*..
  Imponendo la positività del radicando si ottiene – b/2 < *k* < b/2;
  poiché abbiamo supposto anche $k \geq 0$, rimane 0 < k ≤b/2.
  Quale significato geometrico ha questa limitazione?

Le espressioni dei tre lati, in particolare a=b-k, evidenziano la necessità che sia $k<b$, affinchè le misure siano non negative. La più restrittiva condizione $k \leq b/2$, corrisponde alla *disuguaglianza triangolare:* la misura di ciascun lato di un triangolo deve essere minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due.

Imponendo nel nostro caso che il lato maggiore sia minore o uguale della somma degli altri due otteniamo infatti *b + k<(b-k)+b cioè 2k£ b* ovvero *k£ b/2.*

Domanda *b):* valore di *k* che rende massimo *r*.

La determinazione del valore di *k* che rende massimo il valore di *r si* ricava immediatamente. Non occorre neanche calcolare derivate. Infatti l'espressione $b^2—4k^2$ è in ogni caso $\leq b^2$, *e* l'uguaglianza si realizza se e solo se $k = 0$; il massimo valore di *r* si ha quando

k = 0, ed in tal caso è r=√3/6 b.

Geometricamente, questo corrisponde ad avere un triangolo equilatero, in quanto le misure dei tre lati risultano tutte uguali a *b*.

Domanda c*):* circonferenze inscritta e circoscritta ad *ABC.(vedi fig.2 all'inizio)*

- Il triangolo *ABC è* attualmente equilatero, con lati di misura b.

E' possibile scegliere il sistema di riferimento con l'origine nel punto medio di *AC e* l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AC* Le coordinate dei vertici sono allora: A(-b/2, 0) C (b/2,0) B(0,b/2√3).

- Poiché il triangolo è equilatero, l'incentro I coincide con il circocentro e con il baricentro; perciò *I* si trova

sull'altezza (e mediana) *AO* a distanza da O uguale a 1/3*AO=b/6* √3 → I(0;b/6*√3).

- II cerchio inscritto ha centro in I e passa per O; il suo raggio è quindi uguale a b/6*√3 . La sua equazione è pertanto $x^2+(y-b/6*\sqrt{3})^2=(b/6*\sqrt{3})^2$ cioè x^2+y^2-b/3*√3*y=0
- Il cerchio circoscritto ha ancora il centro in I, e passa per B; il suo raggio è quindi uguale a b/3*√3. La sua equazione è pertanto $x^2+(y-b/6*\sqrt{3})^2=(b/3*\sqrt{3})^2$ cioè x^2+y^2-b/3*√3*y-1/4*b^2=0

Domanda *d):* Rapporto fra i volumi delle sfere.

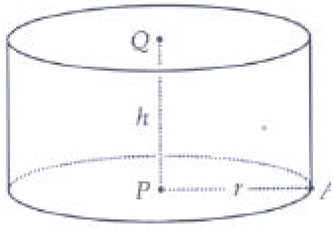
- Non c'è alcuna difficoltà nel calcolare i volumi delle due sfere in questione, poiché sono noti i rispettivi raggi: *r = b/6*Ö*3, *R = b/3*Ö*3. I volumi delle due sfere sono perciò

  v=4/3π(b/6*Ö3)^3 e V=4/3π(b/3*Ö3)^3

  e il loro rapporto risulta essere v/V=1/8
- Si noti che il calcolo esplicito dei volumi delle due sfere è superfluo: è infatti sufficiente osservare che il rapporto fra i loro raggi è r/R=1/2 e che il rapporto fra i volumi è uguale al <u>cubo</u> del rapporto fra i raggi.

.

PROBLEMA 2



Domanda a): cilindro di superficie minima.

Si vuole determinare il cilindro di minima superficie totale, fra quelli di assegnato volume.

- Siano *r* e *h* il raggio di base e l'altezza del cilindro, e *V* il suo volume. Cerchiamo di esprimere la superficie del cilindro in funzione del volume,assegnato, e del raggio, incognito.
  Il volume del cilindro è $V=\pi r^2 h$ da cui $h=V/(\pi r^2)$.
  La superficie totale del cilindro è invece

  $$S = 2prh + 2pr^2$$

  Sostituendo l'espressione di *h* si ottiene $S(r)=2V/r + 2pr^2$

- Questa è la funzione della quale dobbiamo determinare il minimo; il dominio nel quale essa va studiata è l'intervallo]0, +∞[. La derivata rispetto all'incognita *r* è $S'(r) = 2/r^2 *(2pr^3 - V)$ il cui segno nell'intervallo varia come indica il seguente schema,

S'(r)--- MIN ++++++++++++++++++++++++++++++++++++

con $MIN = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2p}}$

Perciò il cilindro di superficie totale minima si ottiene quando r assume tale valore.

La corrispondente altezza si ottiene sostituendo questo valore di *r e risulta h=2r.*

II calcolo mostra che il cilindro di superficie totale minima, con volume assegnato, è quello equilatero, cioè quello in cui l'altezza è uguale al diametro della base.

Domanda *b):* valori di r e *h* nel caso in cui *V* = 2 dl.

L'unica difficoltà consiste nel tradurre l'espressione del volume in unità di misura compatibili con misure di lunghezza, per esempio, centimetri.
Poiché 1 litro equivale a 1000 cm^3,2 decilitri equivalgono a 200 cm^3; per ottenere le misure in cm di *r e h* basta quindi sostituire nei risultati precedenti *V* con 200:

Domanda c*): valori di r e di h* nel caso in cui *V = 2* dl e il diametro di base sia la sezione aurea dell'altezza.

Non c'è più riferimento con la domanda *a).*

Il testo assegna il volume del cilindro: 200 cm^3 e il rapporto fra diametro di base ed altezza, tramite la "sezione aurea".
Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento *AB è* un segmento *AC* il quale, se costruito in modo che C appartenga al segmento *AB*, verifica la proporzione

$$AB:AC = AC:CB$$

cioè, la sezione aurea di *AB è* media proporzionale fra *AB e la* parte rimanente

Da tale proporzione è facile ricavare il "rapporto aureo", cioè il rapporto fra *AC e AB.*

Se *AB = l e AC = x,* segue che

$$x^2=l^2-lx;\ x^{2+}lx-l^2=0$$

da cui, tenendo presente che solo la soluzione positiva è accettabile, $x = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2}$

cioè $x/l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è il rapporto aureo.

Perciò i dati attualmente a disposizione riguardo al cilindro sono: $\pi r^2 h = 200\ cm^3$ e

$r/h = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Queste due relazioni formano un sistema di due equazioni in due incognite, le cui soluzioni forniscono le misure cercate.

Si trova che: $r = \sqrt[3]{\frac{50(\sqrt{5}-1)}{p}}\ cm \quad h = \sqrt[3]{\frac{400(3+\sqrt{5})}{p}}\ cm$

QUESTIONARIO

<u>Quesito 1</u>

- **Il <u>Teorema del valor medio di Lagrange</u> :**

*

Ipotesi: f: *[a,b]* -> R *è una funzione:*
continua in [a,b] ».
derivabile in]a,b[.

Tesi: Esiste *almeno un punto c* Î]a, *b[tale che* $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

- **Il <u>Teorema di Rolle</u>:**

Ipotesi: *f: [a, b]* → **R** *è una funzione:*
continua in [a, b]
derivabile in]a,b[.
risulta f(a)-f(b).

Tesi: *Esiste almeno un punto c* Î *]a,b[tale che f'(c) = 0.*

- Il Teorema di Rolle può apparire come un corollario del Teorema di Lagrange: se è *f(a) = f(b),* allora

  f(b)-f(a) = 0 e la tesi del Teorema di Lagrange coincide in tal caso con quella del Teorema di Rolle.

Nello sviluppare la teoria però non è possibile questa presentazione, perché il Teorema di Rolle è uno

strumento indispensabile per dimostrare il Teorema di Lagrange: il Teorema di Rolle va quindi provato

indipendentemente da quello di Lagrange, e prima di esso.
Le dimostrazioni si possono trovare nel vostro libro di testo..

- Fra le applicazioni più significative del Teorema di Lagrange vi è la seguente, che mette in relazione il segno della derivata di una funzione in un intervallo con la sua monotonia:

  Ipotesi.
  I⊆R *è un intervallo e f:I*—»R *è una funzione derivabile in I.*

  Tesi.
  a) Se f'(x) > O $\forall x \in I$ *allora f è crescente in I.*

b) Se f'(x) < O $\forall x \in$ I *allora f è decrescente in I.*
c) Se f'(x) =O $\forall x \in$ I *allora f è costante in I.*

- Dimostrazione.

F è crescente [rispettivamente: decrescente; costante] se, per ogni a, *b Î I* con *a < b* risulta *f(a) < f(b)* (rispettivamente: f(a) > *f(b);f(a)=f(b))*

Per fissare le idee, ragioniamo sulla a)*;* supponiamo *f'(x)>0* $\forall$*x* $\in$ *I, e* dimostriamo che f è crescente in

Presi *a,b Î I* con *a < b* vogliamo provare che f(a) < *f(b).*
Poiché I è un intervallo e a,b$\in$I, risulta [a,b]$\in$I. Perciò f è derivabile, quindi anche continua, nell'intervallo *[a, b]* cioè *f* soddisfa in *[a, b]* le ipotesi del Teorema di Lagrange.

Per tale teorema esiste ce]a,b[tale che f'(c) =(f(b)-f(a))/(b-a)

Per ipotesi è *f'(c)>0,* quindi $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$.

Per come sono stati scelti a e b è b-a>0. Ne segue che deve essere *f(b)-f(a)* > 0, cioè *f(a)<f(b).*

Lo stesso ragionamento mostra che se l'ipotesi su f' è f'≤0 oppure f' = O, allora f risulta rispettivamente decrescente oppure costante.
Il ragionamento dimostra l'importanza dell'ipotesi che la funzione si definita su di un intervallo. Se il dominio di f non è un intervallo, cioè si hanno delle "interruzioni", le conclusioni del precedente teorema non valgono più.
Guarda caso il Quesito 2 fornisce proprio un esempio che illustra questa affermazione.

Quesito 2

La derivata della funzione data
è $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+(\dfrac{x-1}{x+1})^2} * \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = ... = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

Il risultato (sempre nulla) richiama il Teorema ricordato nel precedente Quesito 1:

Se f'(x) = 0 $\forall$*x Î I (intervallo) allora f è costante in I.*

Questa proposizione non è tuttavia immediatamente applicabile al caso attuale, perché il dominio di f è costituito da due intervalli:D =]-∞,-l[$\cup$]-1,+∞[

Non possiamo quindi concludere che f è costante nel suo dominio ma solo affermare che f è costante in ciascuno dei due intervalli.Il valore costante assunto da f in essi non è necessariamente lo stesso.

- Inseriamo un valore >-1, per esempio 0, e abbiamo
  f(0) = arctg (0) - aretg(-l) =π/4.
  Ciò significa che f(x)= π/4 su tutto il secondo intervallo.
- Non è altrettanto facile determinare un valore da sostituire ad x in questo intervallo; possiamo però ricorrere al calcolo del limite: il limite di una funzione costante sarà proprio il valore di tale costante.

$\lim_{x->-\infty} f(x) = \lim_{x->-\infty} [arctgx - arctg[(x-1)/(x+1)]] =$ =-π/2-arctg(1)=-3/4 π e questo è il valore costante della funzione nel primo intervallo.

Quesito 3

- La funzione in questione è la differenza tra una funzione potenza ed una funzione esponenziale.

E' necessario ricordare che la prima ha dominio limitato ad x>0. Pertanto questo sarà anche il dominio della funzione complessiva.

- $f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln\pi$ $\quad f''(x) = \pi(\pi-1)x^{\pi-2} - \pi^x (\ln\pi)^2$
  il modo più semplice per stabilire il loro segno in π è quello di calcolare il loro valore in tale puntoutilizzando la calcolatrice. Si trova che sono entrambi negativi.

Quesito 4

Si deve calcolare un semplice integrale; il metodo (l'integrazione per parti)è suggerito dal testo

$$\int_0^1 arcsen\ (x) = [x * arcsenx\ ]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Il secondo integrale si ricava facilmente considerando che il numeratore può essere visto come la derivata del radicando se si moltiplica (e divide !) per – 2.

$$= \frac{p}{2} - (-\frac{1}{2}) \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} * (-2x) dx = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} * 2[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \frac{p}{2} - 1$$

Quesito 5

Vedere appunti e libro di testo

Quesito 6

Risolviamo il problema applicando la formula della probabilità condizionale.

Anche se non è esplicitamente specificato, consideriamo il caso in cui <u>non ci sia reimmissione</u>.

- Siano A, B gli eventi:
  A : « entrambe le cifre estratte sono dispari »
  B : «la somma delle cifre estratte è pari»
  Dobbiamo calcolare P(A/B). Per il Teorema della probabilità composta si ha P(A/B)=P(A∩B)/P(B).
  I valori di P(A∩B) e P(B) si calcolano facilmente in modo diretto, con la definizione classica: rapporto fra il numero di esiti favorevoli e il numero di esiti possibili.
- Gi <u>esiti favorevoli all'evento A∩B</u> (entrambe le cifre estratte sono dispari, e la loro somma è pari) sono gli stessi favorevoli all'evento A, perché se entrambe le cifre estratte sono dispari, necessariamente la somma è pari. Si tratta dei possibili gruppi senza ripetizione formati da 2 elementi dell'insieme (1,3,5,7,9). Il loro numero è 5*4/2=10.
  Gli esiti possibili sono invece tutti i sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme(1,2,…,9). Il loro numero è 9*8/2=36.
- Perciò P(A∩B)=10/36 =5/18
  Invece P(B) =16/36=4/9 infatti B si verifica solo se le cifre estratte sono entrambe pari o entrambe dispari.(la prima è pari e la seconda è pari oppure la prima è dispari e la seconda è dispari: : 4/9*3/8+5/9*4/8=4/9)
  Infine si ottiene che P(A/B)=P(A∩B)/P(B)=5/18:4/9=5/8
- Un altro possibile modo per ottenere il risultato è: Le possibili coppie di numeri dispari o di numeri pari: 12+20=32 se conto l'ordine

Gli esiti favorevoli ad A, limitatamente a quelli favorevoli anche a B, sono le coppie di numeri entrambi dispari e sono 20
Perciò P(A/B)=20/32=5/8.

Quesito 7

.

Sia f(x) = x^3 *-2x-5 ;* in 2 la funzione assume valore negativo ed in 3 positivo.

- Poiché f è continua in R, ed in particolare in [2,3], essa assume tutti i valori compresi tra f(2) e f(3). Perciò esiste almeno un punto c∈]2,3[tale che f(c) = 0.

- Per provare *l'unicità* di *e,* calcoliamo la derivata dif:

$$f'(*) = 3\,x^2-2.$$

  Essa è positiva in tutto l'intervallo [2,3]. Perciò f è strettamente crescente in [2,3] e quindi non può avere più di uno zero in tale intervallo.

  _o

- Per determinare la soluzione si utilizzi il metodo di bisezione.

Quesito 8

Sia *R* il raggio della sfera, r il raggio di base del cilindro.Poiché il cilindro è equilatero, la sua *altezza è* uguale a 2 *r.*
Ragioniamo su una sezione piana del solido,ottenuta con un piano passante per l'asse del cilindro .
La sezione del cilindro è un quadrato *ABCD* inscritto nella circonferenza sezione della sfera con detto piano. Allora *AC* = ^-*AB,* cioè 2R = V2-2r, R = rV2. Calcoliamo le superfici totali dei due solidi.

La superficie totale del cilindro è $S_1 = 2\pi * 2r \cdot 2r + 2pr^2 = 6\ pr^2$.

La superficie totale della sfera è $S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi * 2r^2 = 8\pi r^2$. Il rapporto richiesto è quindi è ¾

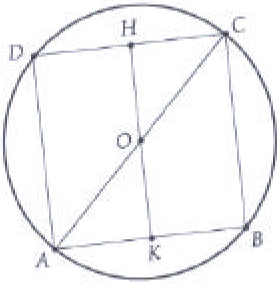
Quesito 9

La risposta è negativa. Sia infatti *ACB* un angolo che insiste sul diametro *AB* di una circonferenza.
II corrispondente angolo al centro è l'angolo piatto *AOB.*
Poiché l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro,
ACB è necessariamente un angolo retto.

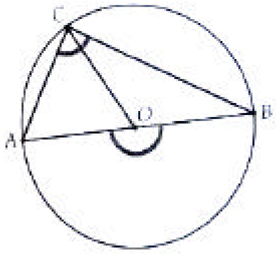
Un altro possibile ragionamento è il seguente: se conduciamo il segmento *CO* abbiamo *AO* = *BO* = *CO*. Il triangolo *ABC è* quindi rettangolo in C perché la mediana relativa al lato *AB* è uguale alla metà del lato stesso. Questa proprietà caratterizza i triangoli rettangoli, infatti in tal caso i due triangoli *AOC e COB* sono isosceli e dunque risulta

$$OCA = O\grave{A}C,\ OCB = OBC.$$

Poiché la somma delle misure dei quattro angoli a due a due uguali
è 180° si ha *ACB =ACO + OCB =90°.*



D
H
C
O
A
K
B



C
A
O
B

$2 \quad 8nr$