Risoluzione della prova

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione 2001

Scuole italiane all'estero

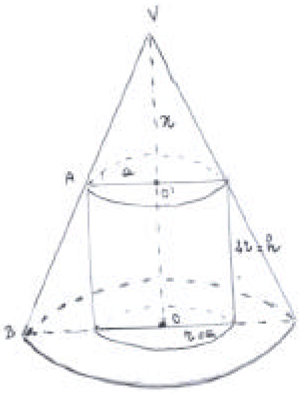
PROBLEMI

1) Un cilindro si dice equilatero se l'altezza è uguale al diametro di base. Pertanto è h=2*a

a) Il cono circoscritto ha base complanare con quella del cilindro.

Si trova che posto x = differenza delle altezze cono/cilindro è:

- altezza cono = 2*a+x
- raggio cono = $(2*a^2+ax)/x$ in quanto sussiste per similitudine tra i triangoli VAO' e VBO la proporzione:
  x : (x+2*a)=a: (raggio cono)



- Allora è $V_{cono}=1/3*\pi r^2 h=1/3\,\dfrac{p*a^2(2a+x)^3}{x^2}$
- Per determinare il minimo si calcola
  $V'=1/3\pi a^2[\dfrac{3x^2(2a+x)^2}{x^4}+\dfrac{-2(2a+x)^3x}{x^4}]$

  Raccolgo $(2*a+x)^2$; tale termine è positivo; pertanto chi decide il segno è (x^2-4ax)

  Risulta V'(x)=0 per x = 4*a e x=0

  Segni di V'(x): +++++ 0 ------ 4a+++++

  per x=4a si ha il minimo.

b) Si determini il valore di a per cui il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale è 31,4:

Sostituisco x con 4*a nella formula del volume ed uguaglio al valore dato.

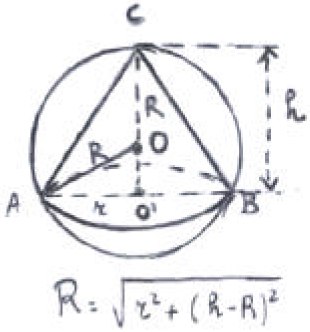
$$\frac{p*a^2(2a+4a)^3}{16a^2}=31{,}4*3 \quad \text{cioè}\quad p*6a^5=16\,a^2*31{,}4 \text{ cioè}$$

$pa^3=8*31{,}4$ da cui ricavo a.

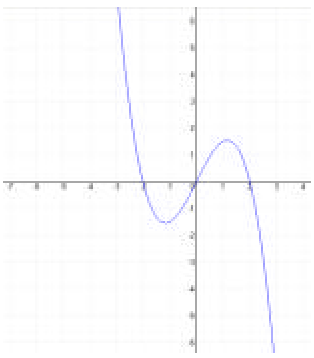
c) La sfera circoscritta al cono di r ed h dati è $V=4/3\pi R^3$

dove (vedi figura) $R=\sqrt{[r^2+(h-R)^2]}$

Elevando ambo i membri al quadrato è possibile ricavare R in funzione di h ed r; è infine possibile sostituire a tali valori quelli trovati per il cono C di cui al punto a) del problema.



PROBLEMA 2:



a) Il grafico è quello della figura a fianco riportato.

b) La retta in questione è y=m(x-2) che può avere fino ad un massimo di tre intersezioni con la cubica .

Ponendo a sistema retta e cubica si trova: $x^3+(2m-4)x-4m=0$.

- Se si azzera in tre punti (tre radici reali) allora per il teorema di Rolle la derivata prima deve azzerarsi in due punti: $y'=3x^2+(2m-4)=0$. Ciò accade se e solo se 2m-4<=0 cioè m<=2
- Non posso avere solo due radici reali perché avrei una sola radice complessa non reale a completare l'insieme delle n radici in C e ciò è impossibile.
- Se si azzera in un punto solo esso deve necessariamente coincidere con A(2,0)
- Non è possibile che non si azzeri mai in quanto comunque passa per (2,0) e più in generale una eq. di 3° grado ha sempre una radice reale.

c)Si tratta di fare l'integrale $\int_0^2 (2x - x^3/2)dx = [x^2 - x^4/8]_0^2 = 4 - 2 = 2$

d) Si tratta di fare l'integrale $p\int_0^2 (2x - x^3/2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 + x^6/4 - 2x^4)dx =$

$\pi[4/3*x^3+1/28*x^7-2/5x^5]^2{}_0=32/3+32/7-64/5$

QUESTIONARIO

Quesito1)

- Si tratta di una forma indeterminata ∞/∞ per x→+∞ pertanto l'<u>enunciato</u> sarà:
  Date due funzioni f e g tali che
  -entrambe sono derivabili in un intervallo illimitato E
  -g'(x)¹0 "x Î E
  -al tendere di x ad infinito entrambe le funzioni sono infinite(è il nostro caso) *o infinitesime*
  -esiste il limite per x→ ¥ di f'(x)/g'(x)
  allora
  esiste anche $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- Il teorema di de L'Hopital va applicato successivamente, addirittura sette volte, per non avere più a che fare con una forma indeterminata:
  $$\lim_{x->+\infty} \frac{x^7}{2^x} = \lim_{x->+\infty} \frac{7x^6}{2^x \ln 2} = \lim_{x->+\infty} \frac{7*6*x^5}{(\ln 2)^2 2^x} = ... = \lim_{x->+\infty} \frac{7!}{2^x (\ln 2)^7} = \frac{7!}{+\infty} = 0$$

Quesito 2)E' sufficiente anche un solo controesempio, ma poiché nel quesito si parla di esempi al plurale, ne offriremo addirittura tre:

<u>Esempio 1</u>

Le due funzioni :Y=x e Y=1.

Le due funzioni derivate: Y=1 Y=0

Prodotto delle derivate: 0

Derivata della funzione prodotto Y=x*1=x : è 1

<u>Esempio 2</u>

Le due funzioni :Y=x^2 e Y=x.

Le due funzioni derivate: Y=2x Y=1

Prodotto delle derivate: 2x

Derivata della funzione prodotto Y=x^3 : è $3x^2$

<u>Esempio 3</u>

Le due funzioni :Y=x e Y=ln(x).

Le due funzioni derivate: Y=1 Y=1/x

Prodotto delle derivate: 1/x

Derivata della funzione prodotto Y=x*ln(x): è ln(x)+1

Per questo come per gli altri esempi la derivata della funzione prodotto si può calcolare utilizzando la definizione, ovvero il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h->0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h->0} \frac{(x+h)*\ln(x+h) - x*\ln(x)}{h} = \lim_{h->0} \frac{x*[\ln(x+h)-\ln(x)]}{h} + \frac{h*\ln(x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h->0} \frac{x*[\ln(\frac{x+h}{x})]}{h} + \ln(x+h) = \lim_{h->0} \frac{[\ln(1+\frac{h}{x})]}{\frac{h}{x}} + \ln(x+h) = 1 + \ln(x)$$

Limite notevole

$$\lim_{x->0} \frac{[\ln(1+x)]}{x} = 1$$

Quesito 3) Un polinomio P(x) divisibile per $(x-a)^m$ può essere scritto come $P(x)= Q(x)*(x-a)^m$; pertanto la sua derivata diventa $P'(x)=Q'(x)(x-a)^m+Q(x)*m*(x-a)^{m-1}=(x-a)^{m-1}[Q'(x)(x-a)+Q(x)*m]$, cioè è divisibile per $(x-a)^{m-1}$.

Quesito 4)

- L'arcoseno è definito per argomenti appartenenti a [-1;1]; è pertanto opportuno verificare per quali valori di x è $-1<\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<1$ cioè $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}<1$ cioè $|x|<\sqrt{1+x^2}$
  Poiché si tratta di quantità entrambe positive ed è pure positivo il radicando, non è necessario porre condizioni di esistenza ed è direttamente da risolvere $x^2<1+x^2$ banalmente sempre verificata. Il dominio della funzione data è pertanto tutto R.
- La derivata della funzione, applicando la derivata delle funzioni composte risulta:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}*\frac{\sqrt{1+x^2}-x*\frac{1}{2}*\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}*\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

- La funzione ha la derivata costantemente uguale a zero in tutto R, cioè è costante in tutto R.
- Il valore della costante può essere determinato inserendo al posto di x un qualsiasi valore di R.
  Ad esempio per x=0 è y=arcsen(0)-arctg(0)=0

Quesito 5) Premettiamo alcune definizioni:

- **<u>Disposizioni semplici di n elementi a k a k:</u>** si tratta di tutti i possibili gruppi di k elementi che si possono formare scegliendo tra gli n elementi dati. Si intende che un elemento non possa essere ripetuto all'interno dello stesso gruppo (per questo si dicono "semplici"). Inoltre nelle disposizioni "conta l'ordine", cioè ad es. 345 e 435 sono due disposizioni diverse perché pur contenendo gli stessi elementi essi occupano differenti posizioni.
- La formula delle disposizioni semplici di n elementi a k a k $D_{n,k}$:
  Per il 1° elemento ho n possibili scelte
  Per il 2° ne ho n-1
  Per il 3° ne ho n-2
  …..
  Per il k° ne ho n-k+1
  Pertanto ***$D_{n,k}$=n*(n-1)*(n-2)*…*(n-k+1)***

- **<u>Combinazioni semplici di n elementi a k a k:</u>** si tratta di tutti i possibili gruppi di k elementi che si possono formare scegliendo tra gli n elementi dati. Si intende che un elemento non possa essere ripetuto all'interno dello stesso gruppo (per questo si dicono "semplici").Nelle combinazioni "non conta l'ordine", cioè ad es. 345 e 435 sono la stessa combinazione poiché contengono gli stessi elementi .
- La formula delle disposizioni semplici di n elementi a k a k $C_{n,k}$:
  E' evidente che alla stessa combinazione corrispondono più disposizioni, tante quante sono le possibili permutazioni su k elementi, cioè k!.
  Perciò $C_{n,k} = D_{n,k}$ / k! =[***n*(n-1)*(n-2)*…*(n-k+1)]/k!***

Quesito 6

Si integra per parti

$$\left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} * \frac{1}{x}\, dx\right)\right]_e^{e^2} = \left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2} * dx\right]_e^{e^2} = \left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right]_e^{e^2} =$$

$2e^4/2-e^2/2-e^4/4+e^2/4=3/4\ e^4-e^2/4= e^2/4*(3e^2-1)$. CVD

Quesito 7

Per definizione di logaritmo è:

$\log_a b=x \leftrightarrow a^x=b$

$\log_b a=y \leftrightarrow b^y=a$

Da ciò deriva $(a^x)^y=a$ cioè x ed y inversi ovvero x*y=1

Ricordando cosa sono x ed y, il quesito è dimostrato.

Quesito 8

Ricordiamo che dalla formula del quadrato di un binomio si ha: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$.

Nel nostro caso ciò diventa $x^2 + y^2 = (16)^2 - 2xy$, ma da x+y=16 si ricava y=16-x.

Pertanto il problema si riduce a studiare max. e minimo di $f(x)= 16^2+2x^2-32x$

ricordando che valgono le limitazioni $0\leq x,y\leq 16$ (la sooma è 16 e non sono negativi !!!)

Minimo: la sua ascissa è la x del vertice cioè 1/16; f(1/16) fornisce il valore minimo cercato.

Massimo: si ha quando x =0 ed 16^2