Risoluzione della prova
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2000/2001
CORSO SPERIMENTALE
(3^a tipologia)

PROBLEMI
Problema 1: (Per un problema analogo vedi 1)a.s. 2000/01 sessione suppletiva L.S. 2)a.s.2002/03 sessione ordinaria L.S.)

a.1)**Insieme di definizione** di $f_m(x)=\dfrac{x+m}{|x+m|-m}$: il denominatore non deve annullarsi

Risolvo $|x+m|-m=0$ cioè $|x+m|=m$ (+) alla ricerca di eventuali annullatori.

- Se m<0 tale equazione è impossibile, dal momento che il 1° membro è positivo o nullo essendo un valore assoluto. → D=$\Re$
- Se m=0 si ha → D=$\Re$-{0} si tratta infatti di y=x/|x| = $\begin{cases} 1 & se \quad x>0 \\ -1 & se \quad x<0 \end{cases}$
- Se m>0 la (+) equivale alle due equazioni
  (1) $x+m=m$
  (2) x+m=-m
  da cui si ricava rispettivamente: x=0 e x=-2m → D=$\Re$-{0,-2m}

a.2)**Insieme di derivabilità** di $f_m(x)=\dfrac{x+m}{|x+m|-m}$:

- La funzione valore assoluto non risulta derivabile nei punti in cui si annulla il suo argomento. L'unico punto del suo dominio in cui f_m potrebbe non essere derivabile è x=-m.
- Per determinare l'insieme di derivabilità di f_m analizziamo dunque il comportamento in x=-m. Poiché possiamo scrivere

$$f_m(x)=\begin{cases} \dfrac{x+m}{x} & se\ x\geq -m \\ \dfrac{x+m}{-x-2m} & se\, x<-m \end{cases}$$

risulta

$$f'_m(x)=\begin{cases} \dfrac{-m}{x^2} & se\ x\geq -m \\ \dfrac{-m}{(-x-2m)^2} & se\, x<-m \end{cases}$$

Passando ai limiti per x→-m:

a) $\lim_{x\to -m^+}\dfrac{-m}{x^2}$ =-1/m b) $\lim_{x\to -m^-}\dfrac{-m}{(-x-2m)^2}$ =-1/(m)

Tali limiti risultano uguali, qualunque sia il valore attribuito ad m.

- Pertanto se ne conclude che f_m è derivabile in ogni punto del suo dominio

b)**Ogni curva C_m ha un centro di simmetria:**

- E' facile intuire (intuizione rafforzata dallo studio del punto successivo) che il centro di simmetria, se esiste, si trova nel punto di ascissa corrispondente alla x che annulla il modulo.
- Nel nostro caso si tratterebbe del punto P(-m;0)
- Per provare l'esistenza di tale centro è sufficiente trasformare la curva tramite una opportuna simmetria centrale; se la trasformata coincide con la curva di partenza allora effettivamente detta curva possiede un centro di simmetria .
- Consideriamo la simmetria di centro P:

s: $\begin{cases} x' = -2m - x \\ y' = \quad -y \end{cases}$ la sua inversa è s^{-1}: $\begin{cases} x = -2m - x' \\ y = \quad -y' \end{cases}$

- Determiniamo la curva trasformata di C_m tramite s.

$$C_m': \; -y' = \frac{-2m - x' + m}{|-2m - x' + m| - m} = \frac{-x' - m}{|m - x'| - m} \quad \text{cioè } y' = \frac{x' + m}{|-m - x'| - m}$$

Tale curva non sembra coincidere completamente con C_m , in realtà invece sono uguali se si riflette sul fatto che il modulo di due valori opposti è il medesimo.

c)**<u>Studio della curva corrispondente ad m=2</u>**

Studiamo $y = \dfrac{x+2}{|x+2|-2}$

- **<u>Dominio</u>** : Considerando il punto a) gia svolto, poiché m>0 dal dominio bisognerà scartare x=0 e x=-2m=-4
- **<u>Simmetrie</u>**: dal punto precedente sappiamo che esiste un centro di simmetria : P(-2;0)
- **<u>Intersezioni assi</u>**: asse x: P(-2;0) ; asse y: impossibile, vedi dominio.
- **<u>Segno</u>**:

numeratore: ----------------- -2 + + + + + + + + + + + + + + +

denominatore: + + + -4 ------ -2 --------- 0 + + + + + + + + + (*)

segno complessivo : ------ -4 ++++ -2 -------- 0 ++++++++++++

Per quanto riguarda il denominatore si tratta di una disequazione col modulo.
Ricordiamo che per risolverla è necessario considerare:

a) $\begin{cases} x + 2 - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -x - 2 - 2 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$

- **<u>Asintoti:</u>**

<u>Orizzontali:</u> poiché numeratore e denominatore sono dello stesso grado esisteranno due asintoti orizzontali; tenendo conto dei moduli sarà:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{x+2}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{x+2}{-x-4} = -1$$

I due asintoti destro e sinistro hanno perciò equazione y=1 e y=-1 rispettivamente.

<u>Verticali</u>: saranno da ricercarsi nei punti in cui non esiste la funzione:

In x=0 $\displaystyle \lim_{x \to o^+} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ e $\displaystyle \lim_{x \to o-} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

In x=-4 $\displaystyle \lim_{x \to -4^+} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ e $\displaystyle \lim_{x \to -4^-} \frac{x+2}{|x+2|-2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

- **<u>Derivata prima:</u>**

Utilizziamo i calcoli già svolti al punto 1: è sufficiente che al posto di m sostituiamo il valore 2:

$$f'_2(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2} & se\ x\geq -2\\ \dfrac{-2}{(-x-4)^2} & se\,x<-2\end{cases}$$ qualunque sia il valore di x la derivata prima è sempre negativa, cioè la funzione è sempre decrescente.

- **<u>Derivata seconda:</u>**

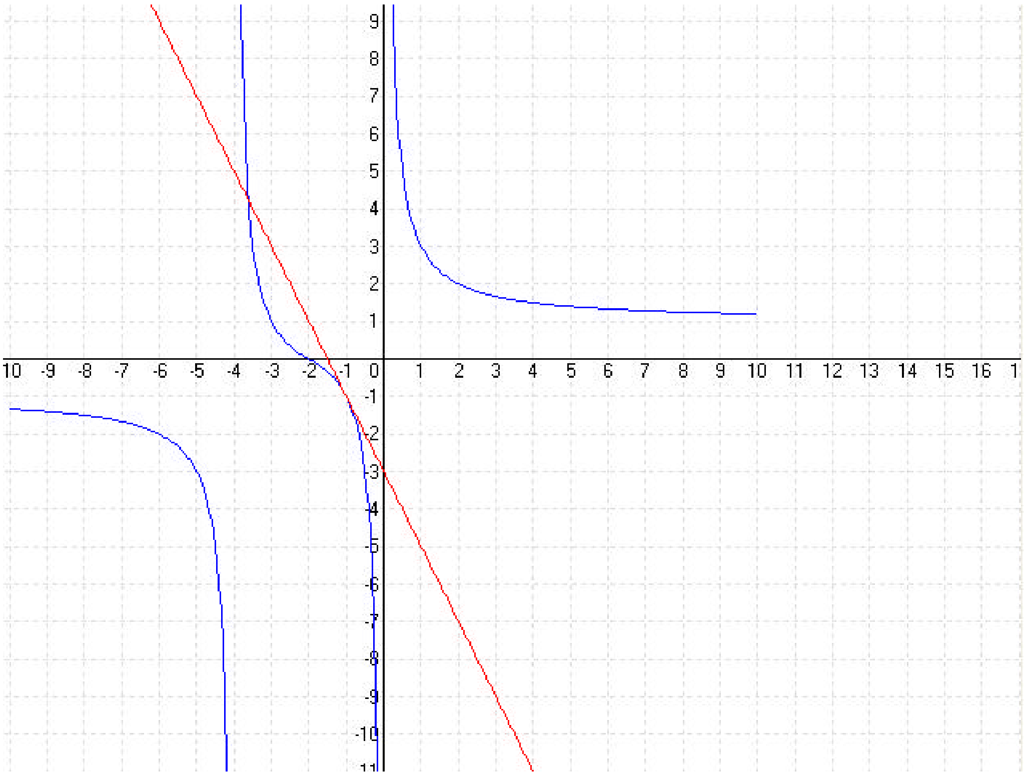
$$f''_2(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x^3} & se\ x\geq -2\\ \dfrac{-4}{(-x-4)^3}=\dfrac{4}{(x+4)^3} & se\,x<-2\end{cases}$$ i cui segni risultano:

-2-------------0+ + + + + + per x≥-2

------------------- -4++++-2 per x <-2

Ne segue che la funzione ha la concavità verso l'alto in]-4;-2[∪]0;+∞[

verso il basso in]-∞;-4[∪]-2;0[



d)

- Determinare l'equazione della retta tangente a C_2 nel punto di ascissa –1:

Si tratta della retta per (-1;f(-1))=(-1;-1) con coeff.angolare m=f'(-1)=-2

t :y+1=-2(x+1) → t :y=-2x-3 (in rosso nel grafico)

- Dare l'ascissa dell'ulteriore punto comune a t e C_2:

Equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases}y=-2x-3\\ y=\dfrac{x+2}{|x+2|-2}\end{cases}$$ poiché la funzione ha un modulo in realtà si dovranno risolvere i due sistemi misti:

$$\begin{cases} y = -2x - 3 & x \geq -2 \\ y = \dfrac{x+2}{x} & \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y = -2x - 3 & x < -2 \\ y = \dfrac{x+2}{-x-4} & \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce la soluzione doppia Q(-1,-1);
il secondo ha come soluzioni $x=(-5\pm\sqrt{5})/2$ di cui solo quella negativa è accettabile dato il vincolo $x<-2$.

e)L'area della regione finita di piano delimitata da C_2 e da t (vedi figura) si ottiene come integrale definito della differenza tra le due funzioni (retta-curva) tra i due estremi $x_1=(-5-\sqrt{5})/2$ e $x_2=(-1)$.
Bisognerà tenere conto del fatto che in realtà la curva ha due espressioni diverse a seconda che $x<-2$ o no:

$$\int_{(-5-\sqrt{5})/2}^{-2} \left(-2x-3-\frac{x+2}{-x-4}\right)dx + \int_{-2}^{-1}\left(-2x-3-\frac{x+2}{x}\right)dx =$$

$$\int_{(-5-\sqrt{5})/2}^{-2} \left(-2x-3+\frac{x+2}{x+4}\right)dx + \int_{-2}^{-1}\left(-2x-4-\frac{2}{x}\right)dx$$

Sommo e sottraggo +2 al numeratore

$$= \int_{(-5-\sqrt{5})/2}^{-2} \left(-2x-3+\frac{x+4}{x+4}-\frac{2}{x+4}\right)dx + [-x^2-4x-2\ln|x|]_{-2}^{-1} =$$

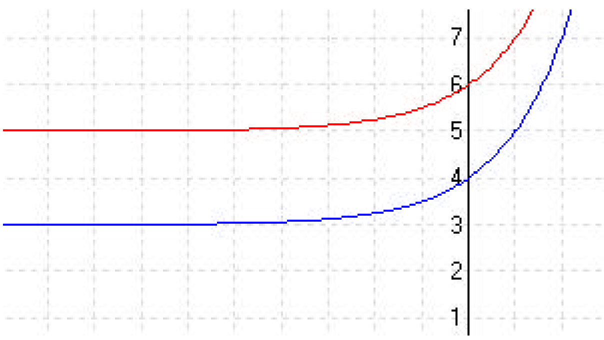
$$= \int_{(-5-\sqrt{5})/2}^{-2} \left(-2x-2-\frac{2}{x+4}\right)dx + [-x^2-4x-2\ln|x|]_{-2}^{-1} =$$

$$=[-x^2-2x-2\ln|x+4|]_{(-5-\sqrt{5})/2}^{-2} + [-x^2-4x-2\ln|x|]_{-2}^{-1} = ... =$$

QUESITI

Quesito 1 Dimostriamo separatamente le due condizioni:

- *Hp. f(x)=g(x) → tesi:f'(x)=g'(x)*
  Se f(x)=g(x) è evidente che coincideranno anche le derivate. Cvd
- *Hp. f'(x)=g'(x) → tesi:f(x)=g(x)*:
  il fatto che le derivate coincidano non significa affatto che le funzioni stesse coincidano, ma solo che differiscono per una costante additiva . Tale costante scompare nella derivazione.
  Es. $f(x)=2^x+3$ e $g(x)=2^x+5$; (vedi fig.)
  E' f(x)=g(x)-2
  Dal punto di vista grafico se considero due funzioni i cui grafici sono l'uno il traslato dell'altro in verticale, avrò che per ogni valore di x le derivate prime , ovvero i coefficienti angolari delle tangenti, coincidono.



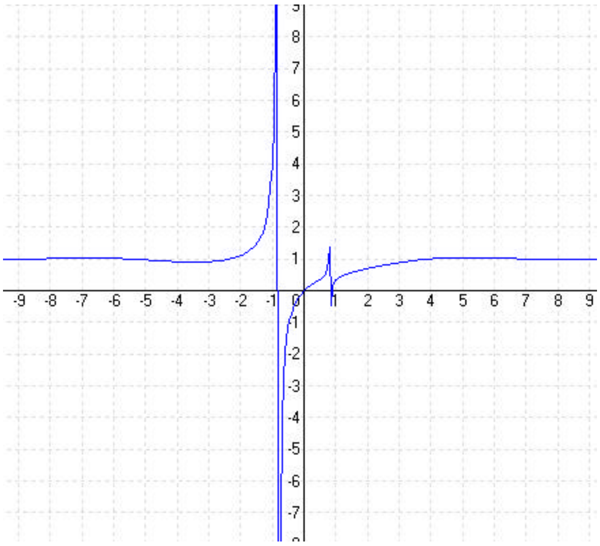
Quindi <u>l'affermazione del quesito 1 è FALSA</u> non essendo verificata una delle due implicazioni.

Quesito 2: Si tratta di una forma indeterminata ∞ / ∞.

- Tanto il numeratore quanto il denominatore infatti tendono ad infinito in quanto somma di un infinito(x^2) e di una quantità oscillante ma comunque limitata (sen x e cos x continuano ad oscillare tra ±1 per $x \to \infty$)
- Poiché i due infiniti sono dello stesso ordine coi coefficienti esattamente identici , il limite è uguale a 1:

La risposta esatta è la b).

In fig.2 è riportato il grafico che illustra l'andamento di $y = \dfrac{x^2 - senx}{x^2 - \cos x}$ da cui appare evidente l'esistenza dell'asintoto orizzontale y=1.



Quesito 3

Questo quesito è spesso ricorrente; sostanzialmente si tratta della dimostrazione del teorema *Se una funzione è derivabile in un punto* x_0 *è ivi continua.*

- <u>Condizione sufficiente</u>: cioè *essere derivabile è sufficiente per poter affermare che è continua.*

  Se la funzione risulta derivabile in x_0 allora esiste finito il limite del rapporto incrementale

  $$\lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) \in \Re$$

  Scrivo f(x) in maniera equivalente ma più comoda:

  $$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} * (x - x_0)$$

  Passando al limite per $x \to x_0$ si ha

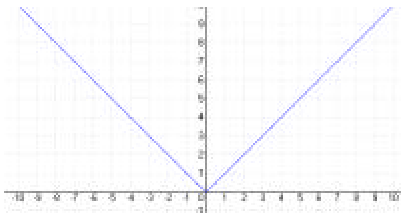
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} * \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) * 0 = f(x_0)$$

  Ma $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ è proprio la definizione di continuità in x_0.

- <u>Condizione necessaria</u>: cioè *essere derivabile è necessario per poter essere continua.*

  L'affermazione è palesemente errata

  Basta portare come controesempio y=|x|; si tratta di una funzione non derivabile (presenta un punto angoloso in x=0) ma tuttavia continua.



4)Poiché una primitiva di f(x) è F(x)=sen (2x), sarà f(x)=F'(x)=2*cos(2x)

Pertanto l'integrale cercato diventerà

$$\int_0^{\frac{p}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right)dx = \int_0^{\frac{p}{2}} 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx = 3\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \left[3sen\left(\frac{2}{3}x\right)\right]_0^{\frac{p}{2}} = 3*\left(sen\frac{p}{3} - sen\,0\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5) Per individuare cosa è rappresentato dall'equazione data $x^2+y^2-4xy=0$

innanzitutto proviamo ad esplicitare rispetto ad una delle due variabili, per esempio rispetto ad y: $x^2+y^2-4xy=0 \quad \to y^2-4xy+ x^2=0$

→ $y = \dfrac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 4x^2}}{2}$ (vedi formula risolutiva eq. 2° grado)

→ $y = 2x \pm x\sqrt{3} = x(2 \pm \sqrt{3})$ si tratta cioè di due rette passanti per l'origine

La risposta corretta è la d)