Risoluzione della prova

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2002/2003
CORSO SPERIMENTALE
SESSIONE SUPPLETIVA
Autonomi gruppo 2

N.B. A parte il quesito 10, tutti gli altri i quesiti ed entrambi i problemi sono identici a quelli proposti per la prova suppletiva PNI 2002/3

PROBLEMI

1)

2)Siano L,K,M,H i punti di tangenza

QUESTIONARIO

1)Sono possibili almeno due soluzioni, di cui una più propriamente “geometrica” e l’altra “trigonometrica”. Noi considereremo la prima.

<u>Risoluzione di tipo geometrico:</u>

Consideriamo il cerchio di centro O e raggio r e le due corde AB di lunghezza l e AC sottesa all’angolo al centro $A\hat{O}C$ =1/2 $A\hat{O}B$ (vedi figura).

Il triangolo AOB è isoscele sulla base AB, pertanto la bisettrice dell’angolo al centro, la mediana e l’altezza relative alla base coincidono. Ne segue che il raggio OC (bisettrice dell’angolo al centro per costruzione) interseca AB nel punto medio H.

- Applichiamo allora il Teorema di Pitagora al triangolo AHO:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

- Ricaviamo CH per differenza: $\overline{CH} = \overline{OC} - \overline{OH} = r - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$
- Riapplichiamo il Teorema di Pitagora, questa volta al triangolo ACH:

Sviluppo del quadrato di CH

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2 + r^2 - \frac{l^2}{4} - 2r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}};$$

1° quadrato | 2°quadrato | Doppio prodotto

svolgendo i calcoli $\sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l^2}} = \sqrt{r} * \sqrt{2r - \sqrt{4r^2 - l^2}}$.

- Si tratta del risultato voluto, pertanto potreste fermarvi al punto precedente.
  Tuttavia può essere espresso in modo più elegante ricordando le formule dei radicali doppi $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

2)Si consideri la fig.1 che illustra la situazione descritta nel quesito. Già da qui è possibile intuire la perpendicolarità tra i due piani.
Per una dimostrazione più rigorosa ricordiamo innanzitutto che si dice angolo formato da due piani α e β l'angolo di una sezione normale, cioè l'angolo formato dalle due rette in cui un terzo piano c perpendicolare alla retta s ottenuta dall'intersezione di α e β, interseca α e β.
Si può mostrare che il piano γ si può scegliere in modo che contenga la retta r.
Sia P il punto in cui r interseca β. Da P conduciamo sul piano β la perpendicolare ad s; sia H il piede di detta perpendicolare. Poiché $r\perp\beta$ e, per costruzione, PH $\perp$ s, per il teorema delle tre perpendicolari, il piano γcontenente r ed H è perpendicolare ad s, quindi dà origine ad una sezione normale del diedro formato da α e β .
Sia t la retta $\alpha\cap\gamma$. T è complanare con r (sul piano γ) e giace su α che è parallelo ad r; quindi r e t sono parallele. Siano T ed R rispettivamente un punto di t e un punto di r, diversi da P ed H, e situati nel medesimo semispazio rispetto a β.
Gli angoli PHT e HPR sono coniugati interni rispetto alla coppia di rette r,t e alla trasversale PH.
Poiché l'angolo HPR è retto (in quanto $r\perp\beta$), deve essere retto anche PHT, supplementare di HPR.
Perciò è provato che una sezione normale del diedro formato da α e β genera un angolo retto, cioè α e βsono perpendicolari. Cvd.

3)Dato il modo in cui è stato posto il quesito è possibile sia una risoluzione "canonica" impostando un sistema di disequazioni irrazionali sia una risoluzione meno elegante ma altrettanto efficace per "tentativi"

a)**<u>Risoluzione tramite sistema di disequazioni irrazionali.</u>**

- Le condizioni che determinano il dominio della funzione assegnata si ottengono imponendo

che il radicale di ciascuna delle due radici quadrate sia ≥0. Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-2x}\geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(*)}$$

- Poiché la seconda disequazione si può scrivere come $x\geq\sqrt{x^2-2x}$

cioè è del tipo $\sqrt{f(x)}\leq g(x)$ essa è equivalente a $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ f(x) \leq g(x)^2 \end{cases}$ che nel nostro caso diventa $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x^2\geq x^2-2x \end{cases}$ **(**)**

- La prima di tali disequazioni coincide proprio con la prima diseq. di (*);
il sistema (**) è pertanto sufficiente a caratterizzare il dominio della funzione.

- Lo schema risolutivo del sistema è il seguente:
disequazione1 __________________●0-------------2● _______________________
disequazione2 ----------------------●0___________________________________
disequazione3 ----------------------●0_____________________________________
sistema ----------------------●-----------------● _________________________

La soluzione pertanto è x = 0 e x ≥ 2
N:B: ●questo simbolo indica che gli estremi vanno presi!!!

b)**<u>Risoluzione tramite tentativi:</u>**
Dal momento che erano fornite quattro risposte di cui una sola valida, una tecnica efficace anche se empirica era quella di procedere per esclusione:

- Le prime due risposte implicavano $x \leq 0$; era immediato notare che x negativo rendeva tutto il primo radicando negativo, in quanto la seconda radice diventava a sua volta negativa in virtù del segno meno che aveva davanti. La somma di due quantità negative non può essere che negativa . a) e b) erano da escludersi!!!
- La c) e la d) differivano rispettivamente nell'escludere o accettare il valore 2.
  Risultava allora immediato vedere cosa accadeva per x=2. Si trovava f(x)=2.
  La soluzione corretta pertanto era la d)!!!

4)Distinguiamo la condizione necessaria da quella sufficiente

- Dimostrare la prima parte, cioè la **<u>condizione necessaria</u>**, era immediato:
  Se infatti un polinomio ha due radici in x = a, ciò significa che la curva corrispondente è tangente all'asse x in a. Tale tangente in quanto tangente orizzontale avrà coefficiente angolare nullo, ma tale coefficiente angolare non è altro che il valore della derivata calcolato in a, ovvero f'(a)=0. Cvd
- Per dimostrare che la seconda parte non è necessariamente vera basta portare un controesempio : la curva $y=1/6 *(x-a)^3$ ha come polinomio associato l'espressione che compare al secondo membro. La derivata prima si annulla in a,e così pure il polinomio, ma quest'ultimo ha ben tre radici in a, non solo due.
- Si rende allora necessario rileggere attentamente il testo del quesito:

  Si consideri un polinomio di grado n³2 nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale a è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per x=a.

  Se tale testo si interpreta come "ammetta <u>esattamente</u> due zeri uguali ad a", allora abbiamo visto che la c.n non è vera; se invece l'interpretazione è "ammetta <u>almeno</u> due zeri uguali ad a" allora sono vere sia la condizione necessaria che quella sufficiente.
  E' più probabile che questa sia l'interpretazione giusta nel senso che ammette due radici e su eventuali altre non si ipoteca nulla.
  Alla luce di tale interpretazione rivediamo la dimostrazione:

- **<u>C.necessaria</u>** :Poiché a è radice almeno doppia, il polinomio p(x) di grado n si potrà fattorizzare così:
  $p(x)= (x-a)^2*q(x)$ con grado di q(x)=n-2;
  non si esclude pertanto che lo stesso q(x) sia divisibile per (x-a), in tal caso a sarà radice di molteplicità maggiore di due per p(x).
  Derivando il polinomio : $p'(x)=2(x-a)*q(x)+(x-a)^2*q'(x)$ e quindi p'(a)=0 cvd.
- **<u>C.sufficiente</u>**: Poiché p(x) per ipotesi si annulla in a, sarà p(x)= (x-a)*s(x) e p'(x)=s(x)+(x-a)*s'(x)
  poiché p'(x) si annulla essa pure in a per ipotesi , deve essere s(a)=0 cioè s(x)=(x-a)*q(x) ma ciò implica che la fattorizzazione di p(x) possa essere rivista come $p(x)= (x-a)^2*q(x)$ cioè p(x) ha radice <u>almeno</u> doppia in a.

5)Innanzitutto va determinato il dominio della funzione $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$: $x \neq 0$ perché al denominatore dell'esponente e x+1>0 perché la base di una funzione esponenziale deve essere positiva. Dominio: $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

- E' immediato pertanto verificare che non ha senso cercare il limite b) $x \to -\infty$
- Posto 1/x =t il limite c) diventa il limite notevole $\lim_{t\to\pm\infty}(1+1/t)^t = e$
- Infine il limite a) risulta essere una forma indeterminata del tipo ∞^0.

  E' possibile risolverlo con De l'Hospital riscrivendolo come $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ (*)
  e affrontando il limite dell'esponente.
  Si tratta di due infiniti, continui e derivabili in]0,+∞[, inoltre la derivata di x non si annulla mai. Valgono le ipotesi del teorema di De l'Hospital e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0 \quad \text{da cui } \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^0 = 1.$$

6)Ricordiamo:***Un sistema lineare omogeneo nxn (ugual numero di equazioni e di incognite) ha come unica soluzione la soluzione nulla se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero.***
Applicando la regola di Sarrus si trova che il determinante vale:
$k(k^2-1)-(k-1)+(1-k)=(k-1)(k^2+k-2)=(k-1)^2(k+2)$
esso risulta uguale a zero solo se k=1 o k=-2.
Per questi due valori pertanto il sistema ha ulteriori soluzioni oltre a quella nulla.
Se invece k è diverso sia da 1 che da –2, l'unica soluzione del sistema è la terna (0,0,0).
L'affermazione del quesito è pertanto falsa; non viene considerato infatti k=-2 tra i valori che danno luogo a soluzioni non nulle.

7)La formula dell'area dell'ellisse con semiassi a,b è *p* ***ab.***
a)<u>Dimostrazione tramite trasformazioni</u>:

- Ricordiamo che il determinante della matrice dei coefficienti di una affinità fornisce il rapporto tra le aree di una figura trasformata e della figura controimmagine:

  detA= $\dfrac{Area\ figura\ trasformata}{Area\ figura\ di\ partenza}$ (*)

  Ciò permette di ottenere l'area dell'una o dell'altra figura conoscendo il determinante ed una delle due aree.
- Una qualsiasi ellisse può essere immaginata centrata nell'origine, coi propri semiassi giacenti sugli assi cartesiani del sistema di riferimento; cioè con una opportuna scelta degli assi può essere vista come ellisse di eq. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Tale ellisse a sua volta può essere vista come trasformata della circonferenza di centro (0,0) e raggio unitario nella dilatazione $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ avente determinante della matrice associata *ab*
- Poiché tale circonferenza ha area π, dalla (*) si ottiene che Area ellisse =*p*ab=pab.*

b) **<u>Dimostrazione tramite calcolo di integrali</u>**

- Abbiamo detto che una qualsiasi ellisse può essere immaginata centrata nell'origine, coi propri semiassi giacenti sugli assi cartesiani del sistema di riferimento; cioè con una opportuna scelta degli assi può essere vista come ellisse di eq. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

- Da qui esplicitiamo y, in modo da ottenere l'espressione della funzione che rappresenta la semiellisse superiore:
  $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$
- L'area cercata è quattro volte quella compresa tra tale funzione, l'asse delle x e le due rette x=0 e x=a
- E' allora sufficiente calcolare il seguente integrale $4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$

  Conviene effettuare un cambiamento di variabile x/a = sen t, cioè x=a *sen t da cui si ottiene dx= a cost dt.
  L'integrale, ricordando di cambiare opportunamente gli estremi di integrazione, diventa:

$$4b\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \sqrt{1-sen^2 t} * a * \cos t\, dt = 4ab\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \sqrt{\cos^2 t} * \cos t\, dt = 4ab\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \cos^2 t\, dt = 4ab * \frac{1}{2}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} (1+\cos(2t))\, dt =$$

$$= 2ab * [t + \frac{1}{2} sen(2t)]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = 2pab/2 = pab$$

Formula di bisezione per il coseno

8)Ricordiamo che le equazioni di una affinità sono quelle di una similitudine diretta se
i coefficienti della diagonale principale sono uguali
e quelli della diagonale secondaria risultano opposti

- Nel nostro caso ciò significa impostare il seguente sistema:

$\begin{cases} a+1 = 2b \\ -b = -a+1 \end{cases}$ da cui si ricava facilmente a=3 e b=2

Sostituendoli nell'affinità di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + 3 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$$

Ricerca del punto unito: è sufficiente risolvere: $\begin{cases} x = 4x - 2y + 3 \\ y = 2x + 4y - 1 \end{cases}$

da cui si ricava x=-7/13 y=9/13.

9)a) Se la prima pallina estratta è rimessa nell'urna, qualunque informazione su di essa non può influenzare in alcun modo l'estrazione della seconda pallina . Ne segue che la probabilità cercata è 18/30.

b)In caso di mancata reimmissione invece cala il numero di casi possibili per la seconda pallina (da 30 a 29); inoltre sapere che la prima pallina estratta era bianca porta i casi favorevoli per la seconda da 18 a 17.
La probabilità cercata è 17/29

c)Coincide con il caso a) dal momento che non mi interessa affatto cosa sia venuto fuori prima.
Volendo si può affrontare come:
esce bianca **ed** esce bianca **oppure** esce nera **ed** esce bianca
cioè 18/30*17/29+12/30*18/29= 18/30=3/5

10) Data $10^{(e^x)} = e^{(10^x)}$,

- applico ad ambo i membri il logaritmo naturale (potrei indifferentemente applicare il $\log_{10}$)

$\ln(10^{(e^x)}) = \ln e^{(10^x)}$, da cui $e^x \ln 10 = 10^x$

- metto in evidenza l'esponenziale $\left(\frac{10}{e}\right)^x = \ln 10$
- ricavo x applicando la definizione di logaritmo (esponente da dare ad una certa base per ottenere l'argomento: $x = \log_a b$ se e solo se $a^x = b$)
  $x = \log_{10/e} (\ln 10)$
- poiché la calcolatrice non è in grado di calcolare logaritmi in base diversa da dieci e da quella naturale, effettuo un cambiamento di base secondo la regola nota
  $\log_a b = \log_c b / \log_c a$
  Decido di porre tutto in base e:
  cioè $x = \ln(\ln 10)/\ln(10/e)$ con la calcolatrice è ora possibile calcolare un valore approssimato: 0,640239218